

Exercice 1 : Dérivée de Lie

Sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$, on définit la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X \alpha$ de la forme différentielle α suivant le champ de vecteurs X par

$$\mathcal{L}_X \alpha = \frac{d}{dt}(\varphi_t^* \alpha)|_{t=0}$$

où φ_t est le flot du champ de vecteurs X , défini au voisinage du temps $t = 0$.

1. Soit X un champ de vecteurs sur U , montrer que $\mathcal{L}_X : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$ est l'unique application \mathbf{R} -linéaire qui :
 - (a) vérifie $\mathcal{L}_X f = df(X)$ pour toute $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$;
 - (b) est une dérivation *i.e.* $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta$ pour toutes formes $\alpha, \beta \in \Omega(U)$;
 - (c) commute avec la différentielle extérieure.
2. Soit X un champ de vecteur sur U . Montrer la formule de Lie-Cartan

$$\mathcal{L}_X = d\iota_X + \iota_X d,$$

où ι désigne le produit intérieur et d la différentielle extérieure.

3. Soient X, Y des champs de vecteurs sur U , leur crochet $[X, Y]$ est l'unique champ de vecteur tel que $\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$, montrer la formule

$$\mathcal{L}_X \iota_Y - \iota_Y \mathcal{L}_X = \iota_{[X, Y]}.$$

Exercice 2 : Divergence et théorème de Liouville-Gibbs

Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et ν une forme volume sur U . On dit qu'un difféomorphisme φ de U préserve le volume par rapport à ν si $\int_{\varphi(V)} \nu = \int_V \nu$ pour tout ouvert $V \subset U$ relativement compact. La divergence du champ de vecteur X par rapport à ν est le réel $\operatorname{div}_\nu X$ tel que

$$\mathcal{L}_X \nu = \operatorname{div}_\nu X \nu.$$

1. Déterminer $\operatorname{div}_\nu X$ pour la forme volume standard $\nu_{\mathbf{R}^n}$ sur \mathbf{R}^n .
2. Montrer que le flot de X préserve le volume par rapport à ν si et seulement si $\operatorname{div}_\nu X = 0$.
3. On munit \mathbf{R}^{2n} de la forme symplectique standard $\omega = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j$. Soit $H : \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}$ lisse, le champ de vecteurs \vec{H} associé au système hamiltonien défini par H est : $\iota_{\vec{H}} \omega = -dH$. Montrer que flot du champ \vec{H} préserve le volume par rapport à $\nu_{\mathbf{R}^{2n}}$.

Exercice 3 : Flot hamiltonien sur les ellipsoïdes

Soient a_1, \dots, a_n des réels strictement positifs. On considère

$$H : \mathbf{R}^{2n} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j (x_j^2 + y_j^2) .$$

1. Déterminer le système hamiltonien défini par H et le résoudre.
2. On suppose $n = 2$ et $c > 0$. Trouver les orbites périodiques dans le niveau $H^{-1}(c)$ et déterminer les périodes associées.

Exercice 4 : Forme normale d'une forme bilinéaire alternée

Soit V un espace vectoriel de dimension m . Soit Ω une forme bilinéaire alternée sur V . Montrer qu'il existe une base $(u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ de V telle que

- $\Omega(u_i, v) = 0$ pour $i = 1, \dots, k$ et $v \in V$;
- $\Omega(e_i, e_j) = \Omega(f_i, f_j) = 0$ pour $i, j = 1, \dots, n$;
- $\Omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j = 1, \dots, n$.

Écrire la matrice de Ω dans cette base.

Exercice 5 : Formes symplectiques linéaires

Soit V un espace vectoriel de dimension $2n$ sur K de caractéristique nulle ou supérieure à n . Soit ω une forme bilinéaire alternée sur V . On dit que ω est symplectique si elle est également non-dégénérée.

1. Montrer que ω est non-dégénérée si et seulement si

$$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n \neq 0.$$

2. On suppose ω non-dégénérée, soit $u \in \text{hom}_K(V)$ tel que $u^*\omega = \omega$ montrer que u est de déterminant 1.

Exercice 6 : Forme normale locale d'une forme volume

Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ et ν une forme volume sur U . Montrer qu'en tout point de U il existe des coordonnées lisses locales (x_1, \dots, x_n) telles que $\nu = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Exercice 7 : Chameau qui passe par le chas d'une aiguille

Soient $n \geq 2$, ν la forme volume standard de \mathbf{R}^n , B la boule unité euclidienne de \mathbf{R}^n , ϵ un réel strictement positif et $M_\epsilon = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = 0 \text{ et } x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \epsilon\}$. Montrer qu'il existe une famille lisse de plongements $\varphi_t : (B, \nu|_B) \rightarrow (\mathbf{R}^n \setminus M_\epsilon, \nu|_{\mathbf{R}^n \setminus M_\epsilon})$, $t \in [0, 1]$ préservant le volume et telle que

$$\varphi_0(B) \subset (x_1 > 0) \text{ et } \varphi_1(B) \subset (x_1 < 0).$$

Exercice 8 : Le carré et le disque

Donner un difféomorphisme qui envoie le carré ouvert du plan de côté $\sqrt{\pi}$ centré en l'origine sur le disque ouvert du plan de rayon 1 centré en l'origine en préservant l'aire.

Exercice 2 : Extension symplectique de difféomorphismes : Corrigé

On note $\pi : T^*M \rightarrow M$ le fibré cotangent de la variété M et on note λ la forme de Liouville sur T^*M .

1. Soit f un difféomorphisme de M , on pose

$$\begin{aligned} F : T^*M &\longrightarrow T^*M \\ p_q &\longmapsto p_q((D_q f)^{-1} \cdot), \end{aligned}$$

alors

$$\pi \circ F = f \circ \pi . \tag{1}$$

Pour tout $v_p \in T_p(T^*M)$,

$$\begin{aligned} (F^* \lambda)_p(v_p) &= \lambda_{F(p)}(D_p F(v_p)) \\ &= F(p)(D_p(\pi \circ F)(v_p)) \\ &= p_q(D_p(f^{-1} \circ \pi \circ F)(v_p)) \\ &= \lambda_p(v_p) \text{ d'après (1).} \end{aligned}$$

2. Soit G un difféomorphisme de T^*M vérifiant $G^* \lambda = \lambda$.

Préliminaires :

Soit $t \in \mathbf{R}$, on note $m^t : T^*M \rightarrow T^*M$ la multiplication d'une 1-forme par t , c'est une application lisse qui vérifie

$$\pi \circ m^t = \pi \tag{2}$$

et dont la restriction à toute fibre $\pi^{-1}(q) = T_q^*M$ est \mathbf{R} -linéaire, en utilisant l'égalité (2) on a en tout $t \in \mathbf{R}$:

$$(m^t)^* \lambda = t \lambda. \tag{3}$$

On note $X(p) := \frac{d}{ds}(m^s(p))|_{s=t}(m^{-t}(p)) = \frac{d}{ds}(m^s(p))|_{s=0}(p)$ pour tout $p \in T^*M$, alors m^t est le flot du champ de vecteurs X d'où $\mathcal{L}_X \lambda = \frac{d}{ds}(s\lambda)|_{s=0} = \lambda$ (d'après (3)). D'après (2), $X \in \ker d\pi$ d'où $\lambda(X) = 0$, alors par la formule de Lie-Cartan

$$\lambda = \iota_X \omega. \tag{4}$$

- (a) On veut montrer

$$G \circ m^t \circ G^{-1} = m^t \tag{5}$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$; il suffit de montrer que les deux membres de (5) sont les flots de deux champs de vecteurs qui coïncident avec même condition initiale.

L'égalité $G^*\lambda = \lambda$ évaluée en le vecteur tangent nul $0_{p_q} \in T_{p_q}(T^*M)$ donne $G \circ m^0 = m^0 \circ G$.

En tout $p \in T^*M$ et $t \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((G^{-1} \circ m^t \circ G)(p)) &= D_{(m^t \circ G)(p)} G^{-1}((X \circ m^t \circ G)(p)) \\ &= (G^*X)((G^{-1} \circ m^t \circ G)(p)) \end{aligned}$$

où $(G^*X)(p) := D_{G(q)} G^{-1}((X \circ G)(p))$ pour tout $p \in T^*M$. Alors en utilisant (4), $\iota_X \omega = \lambda = G^*(\iota_X \omega) = \iota_{G^*X} G^* \omega = \iota_{G^*X} \omega$; donc par non-dégénérescence de ω , $X = G^*X$.

D'où (5).

- (b) On notera aussi m^0 la section nulle $q \in M \mapsto 0_q \in T^*M$. On pose $g = \pi \circ G \circ m^0 : M \rightarrow M$. Alors

$$g \circ \pi = \pi \circ G \circ m^0 = \pi \circ m^0 \circ G = \pi \circ G,$$

où on a utilisé $G \circ m^0 = m^0 \circ G$ et $\pi \circ m^0 = \pi$. On vérifie que $g^{-1} = \pi \circ G^{-1} \circ m^0$, donc g est un difféomorphisme de M .

- (c) L'extension de g en un difféomorphisme symplectique est définie par

$$H(p)(w_{\pi(p)}) = p\{(D_{\pi(p)}g)^{-1}w_{\pi(p)}\}$$

pour tout $w_{\pi(p)} \in T_{\pi(p)}M$. Puisque π est une submersion, il existe un $v_p \in T_p(T^*M)$ tel que $w_{\pi(p)} = D_p\pi(v_p)$, alors

$$\begin{aligned} H(p)(w_{\pi(p)}) &= p\{D_p(g^{-1} \circ \pi)v_p\} \\ &= p\{D_p(\pi \circ G^{-1})v_p\} \text{ d'après 2.(b)} \\ &= ((G^{-1})^*\lambda)_{G(p)}(v_p) \\ &= \lambda_{G(p)}(v_p) \\ &= G(p)(w_{\pi(p)}). \end{aligned}$$

Exercice 1 : Groupe symplectique linéaire

On note I_n la matrice identité de taille n et on définit la matrice carrée de taille $2n$ suivante

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbf{R}), A^T J_0 A = J_0\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2n, \mathbf{R})$ stable par transposition.
2. Décrire $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$.
3. Montrer¹ que tout élément de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$ est de déterminant 1 puis donner un élément de $\mathrm{SL}(4, \mathbf{R}) \setminus \mathrm{Sp}(4, \mathbf{R})$.
4. Montrer que les valeurs propres de $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$ peuvent être regroupées en paires $\lambda, \lambda^{-1} \in \mathbb{R}$, $\lambda, \lambda^{-1} \in S^1$ et en quadruplets $\lambda, \frac{1}{\lambda}, \bar{\lambda}, \frac{1}{\bar{\lambda}}$.

Exercice 2 : Valeurs propres d'un endomorphisme symplectique

On considère (V, ω) un \mathbf{R} -espace vectoriel symplectique de dimension $2n$ et $u \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$. On note E_λ le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ de u .

1. Soient λ et μ deux valeurs propres de A telles que $\lambda\mu \neq 1$. Soient n_λ et n_μ dans \mathbf{N}^* . Montrer que si $u \in \ker((A - \lambda\mathrm{Id})^{n_\lambda})$ et $v \in \ker((A - \mu\mathrm{Id})^{n_\mu})$ alors $\omega(u, v) = 0$.
2. Montrer que ω est non dégénérée en restriction à E_1 et en restriction à E_{-1} .
3. Pour toute valeur propre λ différente de 1 et -1 , montrer que la restriction de ω à $E_\lambda \oplus E_{\frac{1}{\lambda}}$ est non dégénérée.
4. Supposons que u est \mathbf{R} -diagonalisable, montrer qu'il existe une base symplectique de vecteurs propres de u .

Exercice 3 : Décomposition polaire

1. Montrer que pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, il existe un unique couple

$$(H, Q) \in \mathrm{S}^{++}(n) \times \mathrm{O}(n)$$

tel que $M = HQ$.

2. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathrm{S}^{++}(n) \times \mathrm{O}(n) \\ M & \longmapsto & (H, Q) \end{array}$$

est un homéomorphisme.

1. voir le TD1.

Exercice 4 :

Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Soit J une structure complexe calibrée par ω . On considère le produit scalaire $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$. Montrer qu'un sous-espace vectoriel L est lagrangien si et seulement si $L^\perp = JL$.

Exercice 5 : Contractibilité de l'espace des structures complexes calibrées

Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Soit g un produit scalaire quelconque sur V .

1. Montrer qu'il existe un isomorphisme A antisymétrique (pour g) tel que pour tous $u, v \in V$ on ait $g(u, v) = \omega(u, Av)$.
2. Montrer qu'il existe B symétrique définie positive et J orthogonale pour g telles que $A = BJ$, $J^2 = -\text{Id}$ et A et B commutent.
3. Montrer que J est calibrée par ω .
4. Montrer que l'espace des structures complexes calibrées est contractile.

Exercice 6 : Topologie de $\mathcal{J}(\mathbf{R}^{2n})$

On munit les ensembles de classes à gauche $\text{O}(2n)/\text{U}(n)$, $\text{GL}(2n, \mathbf{R})/\text{U}(n, \mathbf{C})$ de la topologie quotient.

1. Montrer que l'inclusion $i : \text{O}(2n)/\text{U}(n) \rightarrow \text{GL}(2n, \mathbf{R})/\text{U}(n)$ est une équivalence d'homotopie. On pourra utiliser l'exercice 3.
2. Montrer que la pré-image de la classe de I_{2n} par la projection $p : \text{GL}(2n, \mathbf{R})/\text{U}(n) \rightarrow \text{GL}(2n, \mathbf{R})/\text{GL}(n, \mathbf{C})$ est contractile. *En utilisant ce résultat on peut montrer que p est une équivalence d'homotopie.*
3. Décrire les composantes connexes de l'espace des structures complexes de \mathbf{R}^2 .

Exercice 7 : Non-tassement linéaire

On munit $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$ de sa structure hermitienne standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qu'on écrit

$$\langle z, w \rangle = g(z, w) - i\omega_0(z, w) \quad \text{où } z, w \in \mathbf{C}^n.$$

Soit $u \in \text{Sp}(\mathbf{R}^{2n}, \omega_0)$ tel que l'image par u de la boule euclidienne unité $B^{2n}(0, 1) \subset \mathbf{R}^{2n}$ est contenue dans le cylindre $\{(z', z'') \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n-1} \mid |z'| \leq R\} \subset \mathbf{R}^{2n}$. Montrer que $R \geq 1$.²

2. Indication : montrer $|u^*(1, 0, \dots, 0)| \geq 1$ ou $|u^*(i, 0, \dots, 0)| \geq 1$ où u^* est l'adjoint de u pour g .

Exercice 1 : Lagrangiens transverses à un lagrangien fixé

On munit \mathbf{R}^{2n} de la structure symplectique standard.

1. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note L l'image de l'application linéaire $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ associée à la matrice $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques de \mathbf{R}^n et \mathbf{R}^{2n} . Montrer que L est lagrangien si et seulement si Z est de rang n et $X^T Y = Y^T X$.
2. On note $L_0 = 0 \times \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n}$ et $\mathcal{L}(L_0)$ l'espace des sous-espaces vectoriels lagrangiens qui intersectent L_0 transversalement. On considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi : S(n) &\longrightarrow \mathcal{L}(L_0) \\ A &\longmapsto \{(x, Ax) \in \mathbf{R}^{2n} \mid x \in \mathbf{R}^n\}. \end{aligned}$$

- (a) Montrer que Φ est bien définie.
- (b) Montrer que Φ est un homéomorphisme.
- (c) En déduire que $\mathcal{L}(L_0)$ est contractile.

Exercice 2 : Symplectomorphismes préservant un lagrangien

1. Soient $A, B, C, D \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2n, \mathbf{R})$$

si et seulement si

$$D^T A - B^T C = 1 \quad \text{et} \quad A^T C, B^T D \in S(n).$$

2. Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique et L_0 un sous-espace lagrangien. Montrer que le groupe $\text{Sp}(V, \omega, L_0)$ des symplectomorphismes linéaires de V dont la restriction à L_0 est un automorphisme qui préserve l'orientation (définie par $\omega^n|_{L_0}$) est homéomorphe à $\text{GL}_+(n, \mathbf{R}) \times S(n)$.

Exercice 3 : Grassmannienne lagrangienne de \mathbf{R}^4

On munit \mathbf{R}^4 de la structure symplectique standard ω_0 .

1. (a) Montrer qu'une 2-forme linéaire alternée α sur \mathbf{R}^4 non nulle est de rang 2 si et seulement si $\alpha \wedge \alpha = 0$.
(b) En déduire que que l'ensemble des 2-formes linéaires alternées de rang 2 sur \mathbf{R}^4 à un facteur réel non nul près est une quadrique projective M lisse de l'espace projectif réel $P(\Lambda^2(\mathbf{R}^4)^\star)$.
(c) Montrer que la grassmannienne des 2-plans de \mathbf{R}^4 est difféomorphe à M .

2. (a) Soit α une 2-forme linéaire alternée α de rang 2 sur \mathbf{R}^4 . Montrer que $\ker \alpha \subset (\mathbf{R}^4, \omega_0)$ est lagrangien si et seulement si $\alpha \wedge \omega_0 = 0$.
- (b) Montrer que la grassmannienne lagrangienne est difféomorphe à une quadrique projective lisse de l'espace projectif réel $P(\{\alpha \in \Lambda^2(\mathbf{R}^4)^* \mid \alpha \wedge \omega_0 = 0\})$.

Exercice 4 : Calcul d'indice de Maslov

Soit $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. On munit \mathbf{C}^n de la forme symplectique standard ω_0 . On considère le lacet de n -plans vectoriels réels de \mathbf{C}^n

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbf{R}/\mathbf{Z} &\rightarrow \text{Gr}(n, \mathbf{C}^n) \\ t &\mapsto \{A_t(x) \in \mathbf{C}^n \mid x \in \mathbf{R}^n\} \end{aligned}$$

où

$$A_t = \begin{pmatrix} e^{ik\pi t} & 0 \\ 0 & iI_{n-1} \end{pmatrix} \in \text{GL}(n, \mathbf{C}).$$

1. Montrer que γ est un lacet à valeurs dans la grassmannienne lagrangienne de (\mathbf{C}^n, ω_0) .
2. On note $L = \mathbf{R}^n \subset (\mathbf{C}^n, \omega_0)$, $\mathcal{L}^0(L)$ l'ensemble des lagrangiens de (\mathbf{C}^n, ω) transverses à L_0 , $\mathcal{L}^1(L)$ l'ensemble des lagrangiens dont l'intersection avec L_0 est une droite réelle. Montrer que $\gamma(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \subset \mathcal{L}(L) \cup \mathcal{L}^1(L)$ et que γ est transverse à $\mathcal{L}^1(L)$.
3. Calculer l'indice de Maslov de γ .

Exercice 5 : Réduction symplectique linéaire

Soit S un sous-espace linéaire co-isotrope d'un espace vectoriel symplectique (V, ω) .

1. Montrer que ω passe au quotient $p : S \rightarrow S/S^{\perp\omega}$ et y définit une forme symplectique ω' .
2. Soit $L \subset (V, \omega)$ un sous-espace lagrangien, montrer que $p(L \cap S + S^{\perp\omega}) \subset (S/S^{\perp\omega}, \omega')$ est un sous-espace lagrangien.

Exercice 1 : Produit de variétés symplectiques

Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques. On note p_1 et p_2 les projections de $M_1 \times M_2$ sur M_1 et M_2 .

1. Montrer que $\omega = p_1^*\omega_1 - p_2^*\omega_2$ est une forme symplectique que $M_1 \times M_2$.
2. Soit $\phi : M_1 \rightarrow M_2$. Montrer que ϕ est symplectique si et seulement si son graphe est lagrangien dans $(M_1 \times M_2, \omega)$.

Exercice 2 : Sections lagrangiennes du cotangent

Déterminer les sections lagrangiennes du fibré cotangent muni de sa structure symplectique standard.

Exercice 3 : Conormal d'une sous-variété

Soient M une variété et S une sous-variété de M . Pour $x \in S$ on note

$$N_x^*S = \{\alpha \in T_x^*M, \alpha(v) = 0 \text{ pour tout } v \in T_xS\}.$$

On pose

$$N^*S = \{(x, \alpha) \in T^*M, x \in S \text{ et } \alpha \in N_x^*S\}.$$

1. Déterminer N^*S si S est un point et si $S = M$.
2. Donner la dimension de N^*S .
3. Montrer que N^*S est une sous-variété lagrangienne de T^*M (muni de la structure symplectique standard).

Exercice 4 : Lagrangiennes de la sphère

1. Déterminer les sous-variétés lagrangiennes compactes sans bord de S^2 .
2. On dit qu'une sous-variété lagrangienne L de M est *déplaçable* s'il existe un difféomorphisme hamiltonien ϕ de M tel que $\phi(L) \cap L = \emptyset$. Déterminer les cercles déplaçables de S^2 .

Exercice 5 : Déplacer un carré sans effort ou presque

1. Soit $C \subset \mathbf{R}^2$ un carré de côté 1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un hamiltonien $H_t : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de flot ϕ_t tel que
 - (a) $\sup H_t - \inf H_t < 1 + \epsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$;
 - (b) $\phi_1(C) \cap C = \emptyset$.
2. Que peut-on dire dans le cas d'un disque ?

Exercice 6 : Difféomorphismes symplectiques de \mathbf{R}^{2n}

1. Montrer que tout symplectomorphisme lisse de \mathbf{R}^{2n} est isotope (parmi les symplectomorphismes) à un symplectomorphisme linéaire.
2. Les symplectomorphismes lisses de \mathbf{R}^{2n} sont-ils tous hamiltoniens ?

Exercice 7 : Théorème de Poincaré-Birkhoff

Soient $A = S^1 \times [-1, 1]$ et $\tilde{A} = \mathbf{R} \times [-1, 1]$. On note (p, q) les coordonnées de A et on considère la forme volume $dp \wedge dq$. L'objectif de l'exercice est de montrer le théorème suivant dans deux cas particuliers.

Définition 1 *Un homéomorphisme $f : A \rightarrow A$ vérifie la condition (C) si f admet un relevé*

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \tilde{A} &\longrightarrow \tilde{A} \\ (p, q) &\longmapsto (p + a(p, q), q + b(p, q)) \end{aligned}$$

où

1. $b(p, \pm 1) = 0$ (f préserve les composantes de bord) ;
2. $a(p, 1) > 0$ et $a(p, -1) < 0$ (f fait tourner les composantes de bord dans des sens différents).

Théorème 1 (Poincaré-Birkhoff) *Soit f un homéomorphisme de A qui préserve le volume et vérifie la condition (C). Alors f a au moins deux points fixes.*

1. Donner un exemple de difféomorphisme de l'anneau sans point fixe et vérifiant la condition (C) mais ne préservant pas le volume.
2. Donner un exemple de difféomorphisme de l'anneau préservant le volume et ayant exactement deux points fixes.
3. On suppose que f est le flot au temps 1 de l'hamiltonien h .
 - (a) Montrer que les points critiques de h sont des points fixes de f . En déduire que f a au moins un point fixe.
 - (b) On suppose que h atteint son maximum en un unique point de A . On obtient un deuxième point critique de h par la méthode du minimax. Soit

$$C = \{\gamma : [-1, 1] \rightarrow A, \gamma \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ et } \gamma(\pm 1) \in S^1 \times \{\pm 1\}\}.$$

On pose

$$c = \inf_{\gamma \in C} \left(\max_{t \in [-1, 1]} h(\gamma(t)) \right).$$

Montrer que c est une valeur critique de h .

- (c) Conclure.

4. On suppose maintenant que $\det(d\tilde{f} + \text{Id}) \neq 0$. Sur $\tilde{A} \times \tilde{A}$ muni de coordonnées (p, q, p', q') , on considère la forme symplectique $dp' \wedge dq' - dp \wedge dq$. On note G le graphe de f . Soit

$$\Theta : \quad \tilde{A} \times \tilde{A} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}^2 \times \tilde{A}$$

$$(p, q, p', q') \longmapsto \left(q - q', p' - p, \frac{p+p'}{2}, \frac{q+q'}{2} \right) .$$

On note (P_1, P_2, Q_1, Q_2) les coordonnées sur $\mathbf{R}^2 \times \tilde{A}$. On considère la forme symplectique $dP_1 \wedge dQ_1 + dP_2 \wedge dQ_2$.

- (a) Montrer que Θ est un plongement symplectique.
 (b) Montrer que sur $\Theta(G)$ on a

$$dP_1 \wedge dQ_1 + dP_2 \wedge dQ_2 = 0$$

$$P_1 = P_1(Q_1, Q_2), P_2 = P_2(Q_1, Q_2).$$

- (c) Montrer qu'il existe $\tilde{S} : \tilde{A} \rightarrow \mathbf{R}$, 1-périodique en Q_1 , constante le long du bord et de gradient sortant et telle que (p, q) est un point fixe de \tilde{f} si et seulement si (p, q) est un point critique de \tilde{S} .

Indication : on pourra considérer la 1-forme $\alpha = P_1(Q_1, Q_2)dQ_1 + P_2(Q_1, Q_2)dQ_2$.

- (d) Conclure.

Exercice 1 : Champ d'hyperplan non intégrable

Soit M une variété lisse de dimension 3 munie d'un champ d'hyperplans ξ . Montrer que (M, ξ) est de contact si et seulement si aucune hypersurface lisse $S \subset M$ ne vérifie la condition

$$T_p S = \xi_p \text{ pour tout } p \in S.$$

Exercice 2 : O

n munit \mathbf{R}^3 de la structure de contact $\xi = \ker(\cos rdz - r \sin rd\theta)$

Exercice 1 : Contactomorphismes de la structure standard sur \mathbf{R}^3

On munit \mathbf{R}^3 du champ de plans $\xi = \ker \alpha$ où $\alpha = dz + \frac{r^2}{2}d\theta$ dans les coordonnées cylindriques.

1. Montrer que α est lisse puis montrer que (\mathbf{R}^3, ξ) est une variété de contact.
2. Soit $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ un difféomorphisme croissant, montrer que l'application $\Phi : (r, \theta, z) \mapsto (r\sqrt{h'(z)}, \theta, h(z))$ est un contactomorphisme de (\mathbf{R}^3, ξ) .
3. Soit $z_0 \in \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ lisse, on note $U_g = \{(r, \theta, z) | r^2g(z) > -2\} \subset \mathbf{R}^3$. Montrer que l'application suivante est un contactomorphisme :

$$(U_g, \xi) \rightarrow (U_{-g}, \xi)$$

$$(r, \theta, z) \mapsto \left(\frac{r}{\sqrt{1 + r^2g(z)/2}}, \theta - \int_{z_0}^z g, z \right).$$

Exercice 2 : Randonnée

On munit l'espace des 1-jets $J^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = T^*\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ de sa structure de contact canonique.

1. Montrer que les sections lisses de $J^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ dont l'image est une sous-variété legendrienne sont exactement les 1-jets de fonctions lisses $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.
2. On note

$$F : \mathbf{R} \rightarrow J^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$x \mapsto (x, 0, x),$$

montrer que $F(\mathbf{R})$ n'est pas une sous-variété legendrienne et que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une sous-variété legendrienne lisse connexe $L \subset \mathbf{R}^3$ passant par $(0, 0, 0)$ et $(1, 0, 1)$ et telle que la distance de L à $F(\mathbf{R})$ dans $J^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ muni du produit scalaire standard soit inférieure à ϵ .

Exercice 3 : Eléments de contact coorientés

Soit M une variété de dimension n , on appelle ensemble des éléments de contact coorientés et on note ST^*M le quotient de $T^*M \setminus 0_M$ par la relation d'équivalence définie par $p_q \sim p'_q$ si et seulement si $q = q'$ et s'il existe $\lambda > 0$ tel que $p' = \lambda p$.

1. Montrer que $ST^*M \rightarrow M$ est un fibré vectoriel réel de rang $n - 1$.
2. Donner des difféomorphismes $S(T^*T^2) \simeq T^3$ et $S(T^*S^2) \simeq \text{SO}(3)$.
3. Montrer que la forme de Liouville sur T^*M induit un champ de plans lisse ξ sur ST^*M puis que (ST^*M, ξ) est de contact.
4. Dédurre des deux questions précédentes des structures de contact sur $T^3, \text{SO}(3)$ puis sur S^3 .

Exercice 4 : Condition de contact

Soit M une variété de dimension $2n + 1$.

1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension $2n+1$ et soient α une forme linéaire et β une forme bilinéaire alternée. Montrer que $\beta|_{\ker \alpha}$ est non dégénérée si et seulement si $\alpha \wedge \beta^n$ est non nulle.
2. Soit α une 1-forme sur M . Soient $v, w \in \ker \alpha_p$. Soient X, Y deux champs de vecteurs définis au voisinage de p , inclus dans $\ker \alpha$ et vérifiant $(X(p), Y(p)) = (v, w)$. Montrer que $\alpha_p([X, Y](p))$ ne dépend pas du choix de (X, Y) . On note $(\kappa_\alpha)_p(v, w) := \alpha_p([X, Y](p))$.
3. Montrer que

$$(d\alpha)_p(v, w) = -(\kappa_\alpha)_p(v, w).$$

4. En déduire que $(M, \ker \alpha)$ est de contact si et seulement si la forme bilinéaire alternée $(\kappa_\alpha)_p$ sur $\ker \alpha_p$ est non dégénérée, pour tout $p \in M$.

Exercice 5 : Intégrabilité

Soit (M, ξ) une variété munie d'un champ de k -plans où $0 \leq k \leq \dim M$, on dit que ξ est intégrable si en chaque point $p \in M$ il existe une sous-variété $S \subset M$ contenant p telle que

$$T_q S = \xi_q \text{ pour tout } q \in S.$$

1. Montrer que tout champ de droites est intégrable.
2. Montrer que sur \mathbf{R}^3 , le champ d'hyperplans $\ker(dz - ydx)$ n'est pas intégrable.
3. Montrer que si ξ est intégrable alors pour tous $p \in M$ et X, Y deux champs de vecteurs définis sur un voisinage de p , inclus dans ξ , $[X, Y](p) \in \xi_p$.
4. Montrer que si ξ est de contact alors ξ n'est pas intégrable. On pourra utiliser l'exercice 4.

Exercice 1 : Structures de contact standard sur \mathbf{R}^3

On munit \mathbf{R}^3 des coordonnées cartésiennes (x, y, z) et des coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Montrer que les variétés de contact $(\mathbf{R}^3, \ker(dz + \frac{r^2}{2}d\theta))$ et $(\mathbf{R}^3, \ker(dz - ydx))$ sont contactomorphes.

Exercice 2 : Structure de contact standard sur S^3

1. On munit \mathbf{C}^2 de sa structure hermitienne standard (J, ω) . On note R le gradient pour la structure euclidienne de $z \in \mathbf{C}^2 \mapsto |z|^2/4$. Montrer que $\iota_R\omega$ est une primitive de ω .
2. On note $S^3 \subset \mathbf{C}^2$ la sphère unité. En tout $p \in S^3$ on note $\xi_p = T_p S^3 \cap J(T_p S^3) \subset T_p S^3$. Montrer que $\xi_p = \ker(\iota_R\omega)_p$ en tout $p \in S^3$.
3. Montrer que (S^3, ξ) est une variété de contact.

Exercice 3 : L'espace et la sphère

On reprend les notations des exercices précédents. Montrer que $(S^3 \setminus p, \xi)$ est contactomorphe à $(\mathbf{R}^3, \ker(dz + \frac{r^2}{2}d\theta))$ pour tout $p \in S^3$. Que peut-on dire sur \mathbf{R}^{2n+1} et S^{2n+1} pour $n > 1$?

Exercice 4 : Flot cogéodésique

1. (a) Soit (M, g) une variété riemannienne, on note

$$H : T^*M \rightarrow \mathbf{R}$$

$$p_q \mapsto \sup_{v_q \in T_q M \setminus 0} \frac{(p_q(v_q))^2}{g(v_q, v_q)}.$$

Montrer que le fibré cotangent unitaire $S_g T^*M = \{p_q \in T_q M \mid H(p_q) = 1\}$ est une hypersurface de type contact de la variété T^*M munie de sa structure symplectique canonique.

- (b) En déduire l'existence d'une forme de contact canonique α sur $S_g T^*M$.
- (c) Montrer que sur $S_g T^*M$ le champ de Reeb associé à α coïncide avec la restriction du champ de vecteurs associé au hamiltonien H . Le flot de ce champ de vecteurs est appelé flot *cogéodésique* sur M .
- (d) Soit $N \subsetneq M$ une sous-variété. Montrer que l'intersection du conormal à N avec le fibré cotangent unitaire de M est une sous-variété legendrienne de $(S_g T^*M, \ker \alpha)$.

2. (a) Montrer que la structure euclidienne standard de \mathbf{R}^2 induit une métrique riemannienne g sur le tore $T^2 = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$.
- (b) On définit la 1-forme suivante sur T^3 :

$$\beta(x, y, z) = \cos(2\pi z)dx - \sin(2\pi z)dy.$$

Donner un difféomorphisme $f : S_g(T^*T^2) \rightarrow T^3$ tel que $f^*(\beta) = \alpha$.

- (c) Décrire les orbites périodiques du champ de Reeb associé à β .
- (d) Déterminer les sous-variétés legendriennes de $S_gT^*T^2$ qui sont invariantes par le flot cogéodésique.

Exercice 5 : Homotopie de champs de plans

On définit sur le tore $T^3 = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^3$, muni des coordonnées (x, y, z) , le champ de plans co-orientés $\xi_n = \ker(\cos(2n\pi z)dx - \sin(2n\pi z)dy)$ pour $n \in \mathbf{Z}$.

1. Montrer que (T^3, ξ_n) est une structure de contact co-orientée pour tout $n \neq 0$.
Quelle est l'orientation de T^3 induite par la forme $\cos(2n\pi z)dx - \sin(2n\pi z)dy$?
2. Montrer que pour tous entiers n, m non nuls il existe une homotopie lisse de champs de plans coorientés

$$H : T^3 \times [0, 1] \rightarrow S(T^*T^3)$$

telle que $H(\cdot, 0) = \xi_n$ et $H(\cdot, 1) = \xi_m$.

Exercice 1 On munit $M \times \mathbb{R}^k$ des coordonnées (q, v) . Soit $S : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que 0 soit valeur régulière de $\frac{\partial S}{\partial v}$. Soit

$$\Sigma_S = \left\{ (q, v), \frac{\partial S}{\partial v} = 0 \right\}.$$

Montrer que

$$i_S : \begin{array}{ccc} \Sigma_S & \longrightarrow & T^*M \\ (q, v) & \longmapsto & (q, \frac{\partial S}{\partial q}) \end{array}$$

est une immersion lagrangienne exacte.

Exercice 2 Soit L_1 et L_2 des sous-variétés lagrangiennes de T^*M_1 et T^*M_2 de fonctions génératrices S_1 et S_2 . Déterminer une fonction génératrice de $L_1 \times L_2$ dans $T^*(M_1 \times M_2)$.

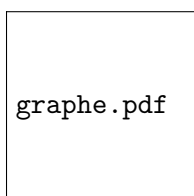
Exercice 3 Déterminer une fonction génératrice de graphe L_α d'une 1-forme exacte α dans T^*M . Que peut-on dire sur les points d'intersection de L_α et de la section nulle ?

Exercice 4 Dessiner Σ_S , L_S et le front d'onde $\{(q, S(q, v)), (q, v) \in \Sigma_S\}$ pour les fonctions génératrices suivantes :

$$S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (q, v) & \longmapsto & q^2v + \frac{1}{3}v^3 - v \end{array}$$

$$S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (q, v) & \longmapsto & -qv + \frac{1}{3}v^3 \end{array}.$$

Déterminer une fonction génératrice quadratique à l'infini de



Exercice 5 Montrer que toute hypersurface compacte coorientée de \mathbb{R}^n admet une immersion lagrangienne dans \mathbb{R}^{2n-2} .

Exercice 1 : Exemple de fonctions J -holomorphes

Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On définit $J : \mathbf{C}^2 \rightarrow \text{End}_{\mathbf{R}}(T\mathbf{C}^2)$ par

$$J_{(z_1, z_2)}(v_1, v_2) = (iv_1 + f(z_1)\overline{v_2}, iv_2)$$

où $(v_1, v_2) \in T_{(z_1, z_2)}\mathbf{C}^2$.

1. Montrer que J définit une structure presque complexe lisse sur \mathbf{C}^2 .
2. Trouver les fonctions holomorphes $(\mathbf{C}^2, J) \rightarrow \mathbf{C}$ si f est l'identité (resp. la conjugaison).

Exercice 2 : $W^{1,2}(\Delta, \mathbf{C}) \not\subset L_{loc}^\infty(\Delta, \mathbf{C})$

Montrer que $f : z \mapsto \log |\log |z|^2|$ appartient à $W^{1,2}(\Delta, \mathbf{C}) \setminus L_{loc}^\infty(\Delta, \mathbf{C})$.

Exercice 3 : Une inclusion de Sobolev

On note $T^2 = (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^2$. On note $W^{2,2}(T^2, \mathbf{C})$ le complété de $\mathcal{C}^\infty(T^2, \mathbf{C})$ pour la norme

$$\|f\|_{W^{2,2}}^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{i+j \leq 2} \int |\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}|^2 dx dy.$$

Pour une suite $(a_{ij}) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}^2}$ on pose $\|(a_{ij})\|_2^2 = \sum_{i,j \geq 0} (1 + i^2 + j^2 + 4i^2j^2 + i^4 + j^4)|a_{ij}|^2$ et $H^2 = \{(a_{ij}) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}^2}, \|(a_{ij})\|_2 < \infty\}$.

1. Montrer que l'injection linéaire $\mathcal{C}^0(T^2, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{N}^2}$ qui associe à chaque fonction sa série de Fourier s'étend en une isométrie $S : (W^{2,2}, \|\cdot\|_{W^{2,2}}) \rightarrow (H^2, \|\cdot\|_2)$.
2. Soit $a \in H^2$, montrer qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que pour tous $(x, y) \in T^2$ et $n \geq p \in \mathbf{N}$,

$$\left| \sum_{l^2+m^2 \leq n^2} a_{lm} e^{i(xl+ym)} - \sum_{l^2+m^2 \leq p^2} a_{lm} e^{i(xl+ym)} \right| \leq \|a\|_2 \sqrt{\sum_{l^2+m^2 > p^2} \frac{1}{(1+l^2+m^2)^2}}.$$

3. Dédurre de la question 2. qu'on a une inclusion continue $W^{2,2}(T^2, \mathbf{C}) \subset \mathcal{C}^0(T^2, \mathbf{C})$.
4. Soit U un ouvert de \mathbf{R}^2 . Dédurre de la question 3. qu'on a une inclusion continue $W^{2,2}(U, \mathbf{C}) \subset \mathcal{C}^0(U, \mathbf{C})$.

Exercice 4 : Courbes rationnelles dans $\mathbf{C}P^2$

On note $\mathbf{C}_d[X, Y] = \{P \in \mathbf{C}[X, Y] \mid P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d P(x, y) \text{ pour } (x, y) \in \mathbf{C}^2 \text{ et } \lambda \in \mathbf{C}\}$. Soient $P, Q, R \in \mathbf{C}_d[X, Y]$ sans zéro commun dans $\mathbf{C}^2 \setminus 0$.

1. (a) Montrer que l'application suivante est holomorphe

$$f : \mathbf{C}P^1 \rightarrow \mathbf{C}P^2$$

$$[x : y] \mapsto [P(x, y) : Q(x, y) : R(x, y)].$$

- (b) Soient N, M deux sous-variétés complexes closes d'une variété analytique complexe close V telles que $\dim_{\mathbf{C}} N + \dim_{\mathbf{C}} M = \dim_{\mathbf{C}} V$ et qui s'intersectent transversalement. Montrer que l'intersection $[N].[M] \in \mathbf{Z}$ des classes fondamentales de N et M coïncide avec le cardinal de $N \cap M$.
- (c) On note σ la forme de Fubini-Study sur $\mathbf{C}P^2$ et $i : \mathbf{C}P^1 \rightarrow \mathbf{C}P^2$ l'application induite par l'inclusion $\mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2 \times 0 \subset \mathbf{C}^3$. Dédurre de la question 1b que

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{C}P^1} f^* \sigma = f_*[\mathbf{C}P^1].i_*[\mathbf{C}P^1] = d.$$

- (d) Montrer que $f_*[\mathbf{C}P^1]$ est σ -décomposable si et seulement si $d \geq 2$.
2. Pour $\epsilon > 0$ on note f_ϵ l'application définie par $P = XY, Q = X^2, R = Y^2/\epsilon$.
- (a) Montrer que pour toute suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'automorphismes de $\mathbf{C}P^1$, $|d(f_n \circ \varphi_n)|_{\mathcal{C}^0(\mathbf{C}P^1)} \rightarrow \infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- (b) En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas dans $\text{Hol}(\mathbf{C}P^1, \mathbf{C}P^2)/\text{Aut}(\mathbf{C}P^1)$.
- (c) On pose $g : [x : y] \in \mathbf{C}P^1 \rightarrow [y : x : 0] \in \mathbf{C}P^2$. Montrer que $d(f_n, g)_{\mathcal{C}^0(\overline{D(0, \sqrt{n})})} \rightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$.
- (d) On pose $\psi_n : [u : v] \in \mathbf{C}P^1 \rightarrow [u : nv] \in \mathbf{C}P^1$ et $h : [u : v] \in \mathbf{C}P^1 \rightarrow [u : 0 : v] \in \mathbf{C}P^2$. Montrer que $d(f_n \circ \psi_n, h)_{\mathcal{C}^0(\mathbf{C}P^1 \setminus D(0, \sqrt{n}))} \rightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$.
- (e) Montrer que $(f_{1/n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge dans $\text{Hol}(\mathbf{C}P^1, \mathbf{C}P^2)/\text{Aut}(\mathbf{C}P^1)$ et décrire sa limite.

Exercice 5 : Une preuve géométrique de la question 2b de l'exercice 4

On prend les notations de l'exercice 4. On note δ la distance induite par la forme de Fubini-Study sur $\mathbf{C}P^2$.

- Décrire $f_n(\mathbf{C}P^1)$ comme le lieu des zéros d'un polynôme de $\mathbf{C}_2[X_0, X_1, X_2]$.
- Montrer que $(f_n(\mathbf{C}P^1))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers le lieu des zéros de $X_1 X_2 \in \mathbf{C}_2[X_0, X_1, X_2]$ pour la distance de Hausdorff sur $(\mathbf{C}P^2, \delta)$.
- Montrer que toute application holomorphe $h : \mathbf{C}P^1 \rightarrow \mathbf{C}P^2$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{C}P^1 &\rightarrow \mathbf{C}P^2 \\ [x : y] &\mapsto [P(x, y) : Q(x, y) : R(x, y)] \end{aligned}$$

où $P, Q, R \in \mathbf{C}_d[X, Y]$ n'ont aucun zéro commun dans $\mathbf{C}^2 \setminus 0$.

- Dédurre des questions 2. et 3. que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas dans $\text{Hol}(\mathbf{C}P^1, \mathbf{C}P^2)/\text{Aut}(\mathbf{C}P^1)$.

Exercice 6 : Classe décomposable ?

Soit $L > 0$. On note ω la forme d'aire standard sur la sphère S^2 , τ la forme symplectique sur le tore $T = (\mathbf{R}/L\mathbf{Z})^{2n}$ quotient de la forme symplectique standard de \mathbf{R}^{2n} , p_j la projection de $S^2 \times T$ sur son j -ième facteur et $\Omega = p_1^* \omega + p_2^* \tau$. Soit $y \in T$. A quelle condition la classe d'homologie $(\text{Id}_{S^2} \times y)_*([S^2])$ est-elle indécomposable ? Qu'en est-il de classe d'homotopie de $\text{Id}_{S^2} \times y$?

Exercice 1 : Inégalité isopérimétrique dans \mathbf{C}

1. Soit $\gamma : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ lisse, donner une application holomorphe $h : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbf{C}$ dont la restriction à $\partial\Delta \simeq \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ coïncide avec γ .
2. Soit $\gamma : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ lisse, montrer

$$\int_{\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}} |\gamma'(s)|^2 ds \geq 2 \int_{\Delta} |h'(z)|^2.$$

3. On note $\omega_{\mathbf{C}}$ la forme d'aire standard sur \mathbf{C} . Soit $\gamma : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ un plongement, on note D la composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus f(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$ montrer que $(\int_{\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}} |\gamma'(s)| ds)^2 \geq 4\pi \int_D \omega_{\mathbf{C}}$.

Exercice 2 : 'Lemme de Schwarz' dans \mathbf{C}

Soit $f : \Delta \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe d'aire $a(f)$ finie. Montrer $\pi|f'(0)|^2 \leq a(f)$.

Exercice 3 : Lemme de la singularité levable dans \mathbf{C}

Soit $f : \Delta \setminus 0 \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe.

1. Montrer que l'aire de f (éventuellement infinie) est reliée aux coefficients du développement en série de Laurent de f par l'égalité

$$a(f) = 2\pi \sum_{k \neq 0} (k+1)^2 |a_k|^2 \int_{[0,1]} r^{2k+1} dr.$$

2. Supposons f d'aire finie, montrer que f s'étend en une application holomorphe $\Delta \rightarrow \mathbf{C}$.

Exercice 4 : Courbes elliptiques dégénérent dans \mathbf{CP}^2

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $S \subset \mathbf{CP}^2$ le lieu des zéros de $X_0 X_2^2 - X_1^3 - X_0^3 \in \mathbf{C}_3[X_0, X_1, X_2]$ et $\mathcal{C} \subset \mathbf{CP}^2$ le lieu des zéros de $X_0 X_2^2 - X_1^3$.

1. Montrer que S est munie d'une structure de surface de Riemann compacte.
2. On pose $f_n = \psi_n \circ j : S \rightarrow \mathbf{CP}^2$ où $j : S \rightarrow \mathbf{CP}^2$ est l'inclusion et

$$\begin{aligned} \psi_n : \mathbf{CP}^2 &\rightarrow \mathbf{CP}^2 \\ [x_0 : x_1 : x_2] &\mapsto [n^{1/2}x_0 : n^{1/6}x_1 : x_2]. \end{aligned}$$

Montrer que f_n ne converge pas dans $\text{Hol}(S, \mathbf{CP}^2)/\text{Aut}(S)$.¹

1. Le groupe d'automorphismes d'une surface de Riemann de genre au moins 1 est compact.

3. Montrer que

$$f_n(S) \cap \{[x_0 : x_1 : 1] \in \mathbf{CP}^2, |x_1| \leq n^{1/3}/2\} \rightarrow \mathbf{C}$$

$$[x_0 : x_1 : 1] \mapsto x_1 .$$

est un biholomorphisme p_n sur son image.

4. On note $h : v \in \mathbf{C} \mapsto [0 : v : 1] \in \mathbf{CP}^2$ et d la distance de Fubini-Study sur \mathbf{CP}^2 , montrer que $d(p_n^{-1}, h)_{C^0(D(0, n^{1/3}/2))} \rightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : Courbes rationnelles et équations implicites dans \mathbf{CP}^2

On prend les notations de l'exercice 4 du TD 10. Soit $d \in \mathbf{N}^*$.

1. (a) Montrer que l'ensemble M_d des applications

$$f : \mathbf{CP}^1 \rightarrow \mathbf{CP}^2$$

$$[x : y] \mapsto [P(x, y) : Q(x, y) : R(x, y)]$$

où $P, Q, R \in \mathbf{C}_d[X, Y]$ sont sans zéro commun est un ouvert de \mathbf{CP}^{3d+2} .

- (b) On note S_d l'ouvert de M_d formé des $f = [P : Q : R]$ tels que le plus grand diviseur commun à $P(U)Q(V) - Q(U)P(V)$, $P(U)R(V) - R(U)P(V)$, $Q(U)R(V) - Q(V)R(U)$ soit $U - V$. Montrer que tout f de S_d vérifie $f^{-1}(f([x : y])) = \{[x : y]\}$ sauf en nombre fini de points de \mathbf{CP}^1 .
- (c) Montrer que l'action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ sur S_d par pré-composition est libre *c'est-à-dire* que tout élément différent de l'identité n'a aucun point fixe.
- (d) Montrer que cette action est propre *c'est-à-dire* que si (φ_n) et (f_n) sont telles que (f_n) et $(f_n \circ \varphi_n)$ convergent, alors une sous-suite de (φ_n) converge.
- (e) Montrer que le quotient $S_d/\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ de cette action est une variété complexe, quelle est sa dimension ?
2. On note $P_d = P(\mathbf{C}_d[X, Y, Z])$, R_d le sous-ensemble formé des classes de polynômes P dont la différentielle est non nulle en chaque point de $\mathbf{C}^3 \setminus 0$ et I_d le sous-ensemble formé des classes de polynômes dont la décomposition en produit d'irréductibles a tous ses facteurs de multiplicité un.
- (a) Montrer que R_d, I_d et $R_d \cap I_d$ sont denses dans P_d pour la topologie usuelle.
- (b) Soient $P, Q \in I_d$, montrer que P et Q ont même lieu de zéros si et seulement si P et Q ont même image dans P_d .
- (c) Comparer $S_2/\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ et I_2 .
- (d) Soit $d \geq 3$, quelle est la dimension complexe de P_d ? Comparer $S_d/\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ et I_d .